

# 137억년 우주의 진화 4회 4강 노트

## 일반 상대성 이론2

mhpark.co.kr의 강의를 보고 나름대로 정리해  
보았습니다. 벡터는 진하게 표기하도록, 판서의 내용은  
그대로 적도록 노력했는데 오류가 많이 있을 것  
같습니다 - 구자경 올림

들어가기

FRW metric

- metric tensor
- Christoffel
- Ricci tensor
- scalar ricci tensor
- energy momentum tensor

Schwarzschild metric

- metric tensor
- Christoffel
- Ricci tensor

1 들어가기

- 2 FRW metric
- metric tensor
  - Christoffel
  - Ricci tensor
  - scalar ricci tensor
  - energy momentum tensor

- 3 Schwarzschild metric
- metric tensor
  - Christoffel
  - Ricci tensor

## 들어가기

### FRW metric

metric tensor  
Christoffel  
Ricci tensor  
scalar ricci  
tensor  
energy  
momentum  
tensor

### Schwarzschild metric

metric tensor  
Christoffel  
Ricci tensor

- FRW metric은 우주 전체를 다룸.
- Schwarzschild metric은 우주 공간에 질량이 있을 때, 질량에 의한 시공 관계를 이야기함.
- 모든 일반 상대성 이론은 metric에서 시작한다.
- $g_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \rightarrow R$

우주 전체를 다루는 팽창하는 4차원 초구를 상정하자. 이걸 3차원적으로 기술하고 싶다. (가우스의 내재적 접근법 : 개미가 3차원 세계로 올라가지 않고도 2차원 세계를 알 수 있다)

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = a^2 \tag{1}$$

4차원 초구에서 미소거리는

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (\underbrace{dx^4}_{\text{모르는것}})^2 \tag{2}$$

$dx^4$ 를 구하기 위해 (1)의 양변을 미분하면,

$$2x^1 dx^1 + dx^2 dx^2 + 2x^3 dx^3 + 2x^4 dx^4 = 0 \tag{3}$$

$$\implies dx^4 = \frac{x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3}{x^4} \tag{4}$$

따라서

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \left( \frac{x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3}{x^4} \right)^2 \quad (5)$$

3차원 구를 생각했을 때,

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2 \quad (6)$$

양변을 미분하면,

$$2x^1 dx^1 + 2x^2 dx^2 + 2x^3 dx^3 = 2rdr \quad (7)$$

이 식을 (5)에 대입하면, (3차원으로 차원을 낮춘 초구의 미소거리?)

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} \quad (8)$$

구면좌표계로 변환하면,

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cos \phi \\ x^2 = r \sin \theta \sin \phi \\ x^3 = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx^1 = dr \sin \theta \cos \phi + r d\theta \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta d\phi \sin \phi \\ dx^2 = dr \sin \theta \sin \phi + r d\theta \cos \theta \sin \phi + r \sin \theta d\phi \cos \phi \\ dx^3 = dr \cos \theta - r d\theta \sin \theta \end{cases}$$

각각을 제곱해서 더한 것을 (8)에 대입하면,

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} \quad (9)$$

$dr^2$ 과  $\frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2}$ 을 더해서 정리하면,

$$\begin{aligned} dl^2 &= \frac{a^2 dr^2}{a^2 - r^2} r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (10)$$

이제 시간 차원을 추가하여 4차원 거리인 간극을 고려 하자.

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - r^2 d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi$$

(FRW metric)

이것이 Friedmann–Robertson–Walker metric 이다.  $\frac{1}{a^2}$ 은 곡률과 관계 있다. FRW metric은 질량 이런 건 없고, 우주가 팽창한다는 인자(factor) 밖에 없다. **시간은 독립적으로 두고 공간이 팽창함**을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (11)$$

이를 계량텐서(metric tensor)를 이용해 나타내면,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (12)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$

**co-low** : 공변성분은 밑에 쓴다.  $g^i$ 는 면에 대해서 일종의 수직인 벡터.  $g_i$ 는 공변 기저 - 일종의 수평 혹은 접선인 벡터.

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/a^2 \end{pmatrix}$$

## Christoffel : metric tensor에 대한 1차 미분

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\rho\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu} \right)$$

$\sigma, \mu, \nu$  각각 4개씩 총 64개 경우가 존재한다.

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{\rho 0} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} g_{\rho 0} + \frac{\partial}{\partial x^0} g_{0\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{00} \right)$$

$\rho$ 는 free index로서 0,1,2,3 모두 가능. 그런데  $g^{\rho 0}$ 이 0이 아니려면  $\rho$ 는 0이어야 한다.

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} g_{00} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} 1 \right) = 0$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{\rho 1} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} g_{\rho 1} + \frac{\partial}{\partial x^1} g_{0\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{01} \right)$$

마찬가지로  $\rho$ 가 1일 때만 값을 가질 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{\rho 1} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} g_{\rho 1} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^0} (-a^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{a^2} \right) (-2a\dot{a}) = \frac{\dot{a}}{a}\end{aligned}$$

그리고 아래 값들도 같은 방식으로 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \frac{\partial}{\partial x^0} g_{22} = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2}g^{33} \frac{\partial}{\partial x^0} g_{33} = \frac{\dot{a}}{a}\end{aligned}$$

이제 3개(트리오)를 구했고, 3개를 더 구해야 한다. 뭐가  
살아 남을까...? 1,0,0를 해볼까?

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left( -\frac{\partial}{\partial x^1} g_{00} \right) = 0$$

여기서  $g_{\mu\nu}$ 가  $\mu, \nu$ 가 1 이상일 때 미분해서도 살아 남으려면,  $\rho$ 가 시간 성분이어야 하므로 0, 1, 1은 살아 남지 않을까?

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{00} \left( -\frac{\partial}{\partial x^0} g_1 \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial x^0} (-a^2) \right) = \frac{1}{2} (2a\dot{a}) = a\dot{a}$$

마찬가지로

$$\Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = a\dot{a}$$

64개 중 지금까지 구한 6개 Christoffel 기호를 정리해 보자.

$$\begin{cases} \Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = a\dot{a} \end{cases}$$

(13)

이제 리치 텐서를 구하자.

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha$$

$\mu, \nu$  : real index, 나머지는 free index.  
쉽게 암기하는 방법은 강의 참조해 주세요:)  
이제 (13)을 이용해 구해 보자.

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{0\alpha}^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{00}^\alpha + \Gamma_{0\beta}^0 \Gamma_{0\alpha}^\beta - \Gamma_{00}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0} (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0} (3\dot{a}/a) + 3\frac{\dot{a}}{a} = 3 \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\ &= 3 \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right) \end{aligned}$$

이 참으로 아름다운.. FRW metric을 가지고 리치텐서의 시간 성분을 보았더니 우주가 가속 팽창한다는, 본질적인 특성이 나왔다.

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{1\alpha}^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{11}^\alpha + \Gamma_{1\beta}^\alpha \Gamma_{1\alpha}^\beta - \Gamma_{11}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\ &= -(\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + 2a\dot{a}\frac{\dot{a}}{a} - 3a\dot{a}\frac{\dot{a}}{a} \\ &= -2\dot{a}^2 - a\ddot{a} \end{aligned}$$

마찬가지로

$$R_{22} = R_{33} = -2\dot{a}^2 - a\ddot{a}$$

이제 스칼라 리치 텐서를 구하자.

$$\begin{aligned} R &= g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} \\ &= R_{00} - \frac{1}{a^2}(R_{11} + R_{22} + R_{33}) \\ &= 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{a^2}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) = 3\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) \\ &= 6\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right] \end{aligned}$$

이제 아인슈타인 중력장 방정식에 넣어 보자.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \tag{14}$$

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi GT_{00}$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}6\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right] = 8\pi GT_{00}$$

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi GT_{00} \tag{15}$$

이 때 T 행렬은 다음과 같다.  $\rho$ 는 에너지 밀도,  $P$ 는 압력을 나타낸다.

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

따라서  $T_{00}$ 는  $-\rho$ 이고 (15)에 대입하면,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

(프리드만 방정식)

들어가기

FRW metric

- metric tensor
- Christoffel
- Ricci tensor
- scalar ricci tensor
- energy momentum tensor

Schwarzschild metric

- metric tensor
- Christoffel
- Ricci tensor

이는 프리드만 방정식  $(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$ 에서  $k = 0$ 인 경우이다! 열역학 법칙을 이용해 유도한 식과 일치한다. 전율한다. 4차원 초구에서 시작해서 기호 장난 같은 걸 전개했더니 프리드만 방정식에서 플랫한 경우가 나온 것이다.

- $T^{\mu}_{\nu;k}$  : 에너지 물질 텐서의 공변 미분
- $T_{\mu\nu}$  : 2계 텐서
- $T^{\mu}_{\nu}$  : 혼합(mixed) 2계 텐서
- $g_i$  : 1계 텐서
- 아인슈타인의 중력장 방정식은 사실 10개의 독립된 미분 방정식인데 텐서 덕분에 하나로 쓸 수 있다. 10개인 이유는 계량 텐서에서 대각 성분 4개와 나머지 12개는 서로 대칭이라 6개만 고려해서 4+6=10.
- 앞으로 스칼라, 벡터 잊어버리고 텐서만 기억하자—

지금까지는 중력장 방정식의 왼쪽 항( $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ )을 다루었다면 이제는 오른쪽 항( $\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ )을 다룬다.

$$T_{\nu;k}^{\mu} = T_{\nu,k}^{\mu} + \Gamma_{\alpha k}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu k}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu}$$

위 식은 k에 대한 공변미분인데 이번엔 k 대신  $\mu$ 로 치환해 보자.

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = T_{\nu,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu}$$

가장 중요한 원칙 중 하나가 공변성(좌표계에 무관)이다. 에너지 모멘텀 텐서가 공변성을 가지려면 발산이 0이어야 한다. 다시 말해서 위의 식이 0이어야 한다. 이는 에너지가 보존된다는 말이다.

이번에는  $\nu = 0$ 인 경우를 따져 보자.

$$T_{0;\mu}^{\mu} = T_{0,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_0^{\alpha} - \Gamma_{0\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0$$

여기서  $T_{0,\mu}^{\mu}$ 는  $\mu = 0$ 일 때만 살아 남고,  $T_0^{\alpha}$ 가 살아남으려면  $\alpha = 0$ 이어야 하고,  $T_{\alpha}^{\mu}$ 가 살아남으려면  $\mu = \alpha$ 이어야 한다.

$$T_{0,0}^0 + (-\rho)(\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) - (\Gamma_{10}^1 T_1^1 + \Gamma_{02}^2 T_2^2 + \Gamma_{03}^3 T_3^3) = 0$$

그리고  $T^0_{0,0} = \frac{\partial}{\partial x^0} T^0_0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 를 대입하여 정리하면,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} - 3\rho\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 3P\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = 0$$

이를 정리하면 다음의 유체 방정식이 유도된다.

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho + P) = 0$$

(유체 방정식)

이는  $\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho + \frac{P}{c^2}) = 0$ 에서  $c = 1$ 인 경우이다. 이를  
이용해 전개하면  $T = 1.5 * 10^{10} \frac{1}{\sqrt{t}}$ 을 유도할 수 있다. 그리고  
(유체 방정식)과 (프리드만 방정식)을 이용하면 우주의 나이  
137억년을 구할 수 있다.

schwarzschild가 1차대전기의 좁고 치열한 참호 속에서 푼  
솔루션을 알아 보자. 우주를 정적인 구대칭으로 가정하고  
 $ds^2$ 를 다음과 같이 생각했다.

$$ds^2 = f_0(r)dt^2 - f_1(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

$f_0, f_1$ 은  $r$ 에 관한 함수이고  $f_0(r) = e^{2\nu}, f_1(r) = e^{2\lambda}$ 라고  
가정한 다음에 해를 찾으려고 했다.

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (16)$$

일반 상대성 이론 푸는 방식 :  $g_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \rightarrow R$  (16)을  
metric 텐서를 이용해 쓰면,

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
 &= \begin{pmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} dx^0 \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}}_{dyad} \\
 &= (e^{2\nu} dx^0, -e^{2\lambda} dr, -r^2 d\theta, -r^2 \sin^2 \theta d\phi) \begin{pmatrix} dx^0 \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

dyad : tensor 곱하기 tensor

예를 들어  $A^\mu B^\nu$  일 때 앞의 텐서  $A^\mu$ 를 행으로 바꿔준다.  
(강의 참조)

들어가기

FRW metric

metric tensor

Christoffel

Ricci tensor

scalar ricci tensor

energy momentum tensor

Schwarzschild metric

metric tensor

Christoffel

Ricci tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}g_{\rho\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}g_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}g_{\mu\nu} \right)$$

FRW에서 했던 것처럼 풀어야 되는데,,, 64개 중 9개만 살아 남는다. 박사님 암기법 : 1 4 2 2. (위의 인덱스가 0인 갯수는 1개, 1인 갯수는 4개, 2인 갯수는 2개, 3인 갯수도 2개) ( $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$  는  $\mu, \nu$ 에 대해 대칭)

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left( \frac{\partial}{\partial x^1}g_{00} \right) = \frac{1}{2}e^{2\nu}(2\nu)'e^{-2\nu} = \nu' \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left( -\frac{\partial}{\partial x^1}e^{2\nu} \right) \nu' e^{2(\nu-\lambda)} = \nu' e^{2(\nu-\lambda)} \\ \Gamma_{11}^1 &= \lambda', \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-2\lambda}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha$$

박사님 암기법 :  $\nu$ 가 붙으면 양수,  $\lambda$ 가 붙으면 음수.

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{0\alpha}^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{00}^\alpha + \Gamma_{0\beta}^0 \Gamma_{0\alpha}^\beta - \Gamma_{00}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \\ &= -(\Gamma_{00}^1)' + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \end{aligned}$$

Let  $t = e^{2(\nu-\lambda)}$ , then  $t' = 2(\nu' - \lambda')t$

$$\begin{aligned} &= -(\nu't)' + \nu'\nu't - \nu't(\lambda' + \frac{2}{r}) \\ \dots &= -(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r})t \\ &= -(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r})e^{2(\nu-\lambda)} \end{aligned}$$

$$R_{00} = -(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r})e^{2(\nu-\lambda)} \quad (17)$$

$$R_{11} = (\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' - \frac{2\lambda'}{r}) \quad (18)$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\nu')e^{-2\lambda} - 1 \quad (19)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (20)$$

물질이 점유하고 있는 부분을 제외한 바깥 영역의 중력장은  $R_{\mu\nu} = 0$ 인 조건을 만족하므로 이 경우  $R_{00} = 0, R_{11} = 0, R_{22} = 0$ 로 놓자.  
출처 : 시간공간의 물리학 (이열 저)  
그 다음 (17)식을 적당히 변형한 다음 (18)을 빼 주면,

$$\frac{2(\nu' + \lambda')}{r} = 0 \implies (\nu + \lambda)' = 0$$

따라서 다음의 중요한 결론을 얻는다.

$$\nu + \lambda = b \text{ 상수}$$

그런데 어떤 구대칭 질량이 있을 때, 무한대 밖에 있으면  
영향이 없다고 봐도 된다. 가까우면 중력이 휘어져서 영향이  
있지만.  $r \rightarrow \infty$  일 때는 flat한 우주로 봐도 된다. 이는 metric  
tensor의 대각 성분이 전부 1이어야 한다. 따라서

$$r \rightarrow \infty \begin{cases} e^{2\nu} \rightarrow 1 \implies 2\nu = 0 \\ e^{2\lambda} \rightarrow 1 \implies 2\lambda = 0 \end{cases}$$

이 말은 상수 b값이 0라는 말이다. 즉  $\nu + \lambda = 0$  (각각이 0  
라는 말이 아니다). 따라서 다음의 중요한 관계를 얻는다.

$$\lambda = -\nu$$

이 식을  $R_{22}$ 에 넣어 보자.

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r(-\nu'))e^{-2(-\nu)} - 1 = 0$$

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1$$

그런데  $(re^{2\nu})' = (1 + 2r\nu')e^{2\nu}$  이므로,

$$(re^{2\nu})' = 1 \implies re^{2\nu} = r + \chi$$

따라서

$$e^{2\nu} = 1 + \frac{\chi}{r}$$

들어가기

FRW metric

- metric tensor
- Christoffel
- Ricci tensor
- scalar ricci tensor
- energy momentum tensor

Schwarzschild metric

- metric tensor
- Christoffel
- Ricci tensor

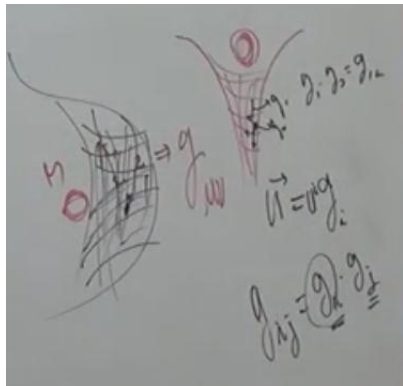


Figure: 출처 mhpark.co.kr

그런데  $e^{2\nu} = g_{00}$ 이다. 그 중요한 metric 텐서의 시간 성분이다. 공이 와서 모기장이 휘어졌다. 얼마나 일그러졌는지를 표현하기 위해서는 좌표가 필요하고, 좌표가 그물코 위치마다 다르다. 그 정보가 바로  $g_{\mu\nu}$ 에 담겨 있고,  $g_{\mu\nu}$ 를 미분해 주면 모든 변화량을 알 수 있다 - 우주를 알 수 있다. metric 텐서가 왜 미분 형태로 된 이유를 알아야 한다. metric 텐서는 미분의 계수이다. 시공이 왜 휘어졌죠? 바로 물질 에너지 때문에.. 미분 개념을 쓴다는 건 이 그물코를 무한히 가늘게 만든다는 말. 각각의 벡터가 시간 방향 공간 방향으로 얼마나 휘어졌는지를 나타낸다. 우주를 이해하기 위해선 metric 텐서를 알아야 한다.. 우리의 운명은 시공의 변화율을 따라간다... 출발은 metric 텐서 밖에 없다. 그물망이 변형된 그 미소한  $dx, dt, dr, d\theta$ 의 변형된 정도값 (계수)을 가지고 행렬을 만든다. 이 모든 정보를, 자기가 얻어맞은 충격을, 우주의 구조를 다 가지고 있다.

Newtonian limit 에서,

$$\frac{dx^i}{ds} \ll c \implies \frac{dx^i}{ds} \ll c \frac{dt}{ds} = \frac{dx^0}{ds}$$

블랙홀 정도 되야 그물망이 확 휘어짐. 아래처럼 근사한다.

$$g^{\mu\nu} = \underbrace{\eta^{\mu\nu}}_{\text{minkowski metric}} + h^{\mu\nu}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + h^{\mu\nu}$$

민코프스키 공간에서는 미분하면 다 0이므로 flat한 우주이다.  $|h^{\mu\nu}| \ll 1$  크기가 훨씬 작다.

여기서 동영상이 끝나서 마무리하겠습니다! 감사합니다.