

137억년 우주의 진화 4회 2강 노트

일반 상대성 이론

mhpark.co.kr의 강의를 보고 나름대로 정리해 보았습니다. 텐서도 난생 처음 보았는데 훌륭한 강의 덕분에 버틸(?) 수 있었습니다. 벡터는 진하게 표기하도록, 판서의 내용은 그대로 적도록 노력했는데 오류가 많이 있을 것 같습니다.

① 들어가기

② 4차원 물리량

간극(4차원 길이)

4차원 속도

4차원 운동량

4차원 총 에너지

3차원 운동에너지 유도

③ Possion's equation

④ geodesic equation

⑤ 곡률 텐서에 대한 이해

⑥ 아인슈타인 텐서

⑦ 비례 상수 k 찾자.

$$\frac{dx^i}{dt^2} = -\nabla\phi \implies \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^x \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

$$: F = ma \implies \text{geodesic equation}$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\sigma \implies R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

$$: \text{poisson equation} \implies \text{중력장 방정식}$$

4차원으로 확장하는 과정에서 길을 잃지 않기 위해
아인슈타인은 물리적 원칙 4가지를 세웠다.

- ① 중력과 가속도의 등가원리
- ② 물리법칙은 좌표계에 무관해서 동일한 형태 $\implies$ 일반 상대성 원리, 일반 공변성 원리
- ③ 고전 물리는 일반 상대성 원리의 특별한 일례
- ④ 에너지와 운동량 보존 법칙 준수

간극(interval) : 길이에 대응하는 4차원 물리량, 두 이벤트 사이의 간극

$$\mathbf{x}^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad dx^0 = d(ct) = cdt$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \begin{pmatrix} dx^0 & dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \\ &= \overset{g_{\mu\nu}}{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds &= dx^0 \sqrt{1 - \left(\frac{dx^1}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{dx^0}\right)^2} \\ &= dx^0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = dx^0 \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned}$$

- 중력장 방정식을 푸다는 것은 ds 를 구하는 것.
- 블랙홀 조건 중에 ds 가 무한대 값이 나오는 게 있음
- x^μ 는 4차원 벡터이고, 1계 텐서임.
- 상대성 이론은 2계 텐서를 다룸.
- 이제 속도에 해당하는 4차원 물리량을 찾아 보자.

들어가기

- 4차원 물리량
 - 간극 (4차원 길이)
 - 4차원 속도
 - 4차원 운동량
 - 4차원 총 에너지
 - 3차원 운동에너지 유도

- Possion's equation
- geodesic equation
- 곡률 텐서에 대한 이해
- 아인슈타인 텐서
- 비례 상수 k 찾자.

u : 속도에 해당하는 4차원 물리량

$$\mathbf{u}^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3)$$

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{(dx^0, d\mathbf{r})}{dx^0 \sqrt{1 - \beta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left| \frac{v}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \right. \right)$$

4차원의 운동량(4원 운동량)

$$m_0 c \mathbf{u} = P = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \middle| \frac{m_0 V}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

일반적으로 4차원에서 운동량은

$$P = \gamma m v$$

(4차원 운동량)

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

(메모 : 위에서 정의한 운동량과 다른 건지 이해 못함-0-)

역학에서 힘(force)를 거리에 대해 적분하면 에너지가 된다.
먼저 $\frac{dP}{dt}$ 를 구해 보자.

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\
 &= \frac{m}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \frac{dv}{dt} + mV \frac{d}{dt} (1 - (\frac{v}{c})^2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{m}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \frac{dv}{dt} + mV \left(-\frac{1}{2} \left(1 - (\frac{v}{c})^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{-2v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right) \\
 &= \frac{m}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \frac{dv}{dt} + \frac{mv^2/c^2}{(1 - (\frac{v}{c})^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} \\
 &= \frac{m(1 - (\frac{v}{c})^2) + \frac{mv^2}{c^2}}{(1 - (\frac{v}{c})^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} = \frac{m}{(1 - (\frac{v}{c})^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt}
 \end{aligned}$$

따라서 일 W는,

$$W = \int \frac{dP}{dt} dx = \frac{m}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} dx = \int \frac{mv}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dv$$

$x \equiv 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2$ 라 치환하면, $v dv = -\frac{c^2}{2} dx$ 가 된다. 또한 $v=0$ 이면 $x=1$ 이고, $v=v$ 이면, x 는 치환한 값이 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} W &= \int \frac{m}{x^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-c^2}{2}\right) dx = -\frac{mc^2}{2} \int x^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= mc^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \Big|_1^{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2 \end{aligned}$$

4차원에서 운동량에 의한 에너지이므로 운동 에너지 K는,

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2 \quad (4차원 운동 에너지)$$

$$K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

좌변은 총 에너지(total energy)이므로 다음 공식이 성립한다.

$$E = \gamma mc^2$$

(총 에너지)

이는 운동하든 정지하든 자연이 갖는 총 에너지이다.

중요한 공식 하나만 더 유도해 보자.

$$\begin{aligned} E^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 = \frac{m^2 c^4}{1 - (\frac{v}{c})^2} = \frac{m^2 c^4 c^2}{c^2 - v^2} \\ &= m^2 c^2 \left(\frac{c^2(c^2 - v^2) + c^2 v^2}{c^2 - v^2} \right) \\ &= m^2 c^4 + m^2 c^2 v^2 \gamma^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \end{aligned}$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$$

(교과서 표지에 나온 공식)

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - mc^2$$

(4차원 운동 에너지)에서 속도가 광속보다 훨씬 느린 경우를
고려 하자. ($v \ll c$)
테일러 근사에 의하여,

$$(1 - (\frac{v}{c})^2)^{-\frac{1}{2}} \approx (1 + \frac{v^2}{2c^2})$$

따라서 운동에너지는,

$$K \approx mc^2(1 + \frac{v^2}{2c^2}) - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

이 공식 보고 충격..... 4차원 운동 에너지에서 속도가
광속보다 훨씬 느릴 때 3차원 운동 에너지가 나온다. 우리가
배워 온 운동 에너지는 근사값이다. 이는 3번째 원리 -
고전물리는 일반 상대성 원리의 특별한 일례 - 를 보여 준다.

$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ 가 어떻게 나왔는지 살펴 보자.

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = m\mathbf{g}$$

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

가우스 법칙에 의해,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV$$

그런데 $d\mathbf{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ 를 이용해 계산하면,

$$\begin{aligned} &= -\int \frac{GM}{r^2}\hat{r} \cdot d\mathbf{a} = -GM \int \frac{d\mathbf{a}}{r^2} \cdot \hat{r} = -GM \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi \\ &= GM \int_0^{2\pi} \cos\theta \Big|_0^{\pi} = -4\pi GM = -4\pi G \int_V \rho dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV \end{aligned}$$

따라서

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$$

그런데 포텐셜을
미분해주면 힘(force)이
되므로 ($\mathbf{g} = -\nabla\phi$)

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi) = -4\pi G\rho$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

(poission's equation)

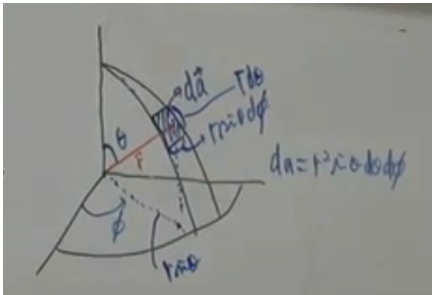


Figure: 출처 mhpark.co.kr

일반 상대성 이론으로 가는 가이드라인. 이 공식부터
출발한다.
질량(밀도)에 의해 퍼텐셜 에너지가 생겼다.

우주가 원래 있었던 그 자리를 수식으로써 보여 준다.
온도가 식으면서 차별화된 개별 상이 나타난다.
생명현상이라는 지긋지긋한 현상이..

풀리는 한강 가에서 - 서정주

강물이 풀리다니
강물이 무엇하러 또 풀리는가
우리들의 무슨 설움 무슨 기쁨 때문에
강물은 또 풀리는가
...

아인슈타인은 에너지 모멘텀 텐서(energy momentum tensor)를 다음과 같이 정했다.

$$T^{\mu\nu} = \sigma_0 c^2 \mathbf{u}^\mu \mathbf{u}^\nu, \quad \mathbf{u}^\mu = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

$$T^{00} = \sigma_0 c^2 \mathbf{u}^0 \mathbf{u}^0$$

$$T^{0i} = \sigma_0 c^2 \mathbf{u}^0 \mathbf{u}^i$$

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \middle| \frac{v}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

이제 $T^{\mu\nu}$ 를 공변 미분 하자. 상대성 이론은 전적으로 공변 미분으로 다 되어 있다. 공변 미분이 되면 텐서성이 보존되고, 이는 좌표에 상관 없이 법칙이 성립된다는 말이다. 다시 말해서 공변 미분으로 표현되어야 좌표에 무관한 양이 된다.

$$\begin{aligned} T_{;\nu}^{\mu\nu} &= (\sigma \mathbf{u}^\mu \mathbf{u}^\nu)_{;\nu} = [(\sigma \mathbf{u}^\nu) \mathbf{u}^\mu]_{;\nu} \\ &= \underbrace{(\sigma \mathbf{u}^\nu)_{;\nu}}_0 \mathbf{u}^\mu + (\sigma \mathbf{u}^\nu) \mathbf{u}^\mu_{;\nu} \end{aligned}$$

0 by 발산정리

그런데 4원 벡터 $\mathbf{u}^\mu_{;\nu} = \mathbf{u}^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu k} \mathbf{u}^k$ 이고 $\mathbf{u}^\mu_{,\nu} = \frac{\partial \mathbf{u}^\mu}{\partial x^\nu}$ 이며 Γ 는 크리스토펔(Christoffe) 기호이다.

$$\begin{aligned} T_{;\nu}^{\mu\nu} &= \sigma \mathbf{u}^\nu [\mathbf{u}^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu k} \mathbf{u}^k] = \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{x}^\nu}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{u}^\mu}{\partial \mathbf{x}^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu k} \mathbf{u}^k \mathbf{u}^\nu \right) \\ &= \sigma \left(\frac{d\mathbf{u}^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu k} \mathbf{u}^k \mathbf{u}^\nu \right) = 0 \end{aligned}$$

(왜 0이 되는지 중간 증명은 생략)

그런데 $u^\mu = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}$ 이므로,

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = \sigma \left(\frac{d^2 \mathbf{x}^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu k}^\mu \mathbf{u}^k \mathbf{u}^\nu \right) = 0$$

따라서 중요한 다음 측지선 방정식이 유도 된다.

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu k}^\mu \mathbf{u}^k \mathbf{u}^\nu = 0$$

(geodesic equation)

- 4원 속도 벡터 2개의 곱으로 정한 에너지 모멘텀 텐서에서 공변 미분을 통해 나온 것이다.
- 에너지 물질 시스템 속에서 스스로 어디로 가야할 지를 안다는 것이다.
- 왜? 에너지 물질이 시공의 곡률을 만들어 주므로 ...
- 왼쪽 항은 $F=ma$ 에, 오른쪽 항은 중력에 대응하는 수식이다
- 아인슈타인은 우주의 법칙을 기하학으로 바꾸고 싶었다

들어가기

4차원 물리량

간극(4차원 길이)
4차원 속도
4차원 운동량
4차원 총 에너지
3차원 운동에너지
유도

Possion's
equation

geodesic
equation

곡률 텐서에
대한 이해

아인슈타인
텐서

비례 상수 k
찾자.

- $\mathbf{g}_i$: 자연기저벡터 (natrual basis vector)
- $g_{\mu\nu} = \mathbf{g}_\mu \cdot \mathbf{g}_\nu$: 계량(metric) 텐서
- $R_{\mu\nu}$: 리치(Ricci) 텐서
- $R^\alpha_{\mu\nu\rho;\sigma}$: 곡률(Riemann christoffel) 텐서
- 에너지와 모멘텀을 보존하면서 시공의 곡률을 나타내는 텐서를 찾기 시작
- 리치 텐서를 가지고 해봤더니 발산이 0가 되지 않아 에너지 보존 법칙에 위배되었다
- 먼저 곡률 텐서에 대해 알아 보자.

들어가기

- 4차원 물리량
- 간극(4차원 길이)
- 4차원 속도
- 4차원 운동량
- 4차원 총 에너지
- 3차원 운동에너지 유도

Possion's equation

geodesic equation

곡률 텐서에 대한 이해

아인슈타인 텐서

비례 상수 k
찾자.

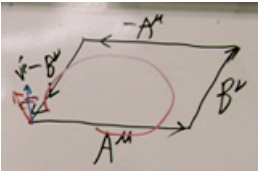


Figure: 출처 mhpark.co.kr

어떤 4원 벡터에 대해 일주 운동을 한 후 처음 위치로 돌아왔을 때, 얼마나 각도가 변했는지를 잴다. 이런 방식으로 시공간의 곡률이 얼마나 휘었는지를 측정한다. 다음 공변 미분을 생각 하자.

$$\begin{aligned} \nabla_k(\nabla_j v_i) &= \nabla_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial \eta^j} - \Gamma_{ij}^l v_l \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta^k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \eta^j} - \Gamma_{ij}^l v_l \right) - \Gamma_{ki}^p \left(\frac{\partial v_p}{\partial \eta^j} - \Gamma_{pj}^l v_l \right) \end{aligned}$$

$$\nabla_j(\nabla_k v_i) = \frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \eta^k} - \Gamma_{ik}^l v_l \right) - \Gamma_{ij}^p \left(\frac{\partial v_p}{\partial \eta^k} - \Gamma_{ki}^l v_l \right)$$

위의 두 식을 빼면 (점검 : 축약하면 i,j,k만 남아야 함),

$$\begin{aligned} \nabla_k(\nabla_j v_i) - \nabla_j(\nabla_k v_i) &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial \eta^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial \eta^k} + \Gamma_{ki}^p \Gamma_{pj}^l - \Gamma_{ij}^p \Gamma_{ki}^l \right) v_l \\ &= R_{ijk}^l v_l \end{aligned}$$

이제 아인슈타인 텐서를 구하자.
Bianchi 항등식으로부터 출발한다.

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma;\nu} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu;\rho} = 0 \quad (\text{Bianchi 항등식})$$

계량 텐서 $g^{\mu\rho}$ 를 곱하고 ν 를 α 로 치환하자.
계량 텐서가 손오공처럼 다 해준다.

$$(g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho})_{;\alpha} + (g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma})_{;\alpha} + (g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\rho\alpha})_{;\rho} = 0 \quad (*)$$

$$g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho} = -g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\rho\alpha} = -g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} = -R$$

(R 밑의 오른쪽 두 인덱스를 교환하면 부호 바뀜)

$$g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} = R^{\alpha}_{\sigma}$$

$$g^{\mu\rho} R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha} = g^{\rho\mu} R_{\sigma\mu} = R^{\rho}_{\sigma}$$

(리치텐서는 대칭이라 교환해도 상관 없음)

계량 텐서가 축약을 해 준다. 놀라운 속성이다. 일반 상대성 이론은 계량 텐서에 관한 미분이다. (물질 에너지가 들어오면 그물코가 확 늘어진 정도를 가지고 있으므로..) 이제 구한 식을 (*)식에 대입하면,

$$-R_{;\rho} + R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} + R^{\rho}_{\sigma;\rho} = 0$$

$R^{\rho}_{\sigma;\rho} = R^{\alpha}_{\sigma;\alpha}$ 이므로,

$$2R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} - R_{;\sigma} = 0$$

양변을 2로 나누고 $R_{;\sigma}$ 를 α 에 대해서 바꾸면(델타 함수 이용),

$$R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\alpha}R_{;\alpha} = 0$$

계량 텐서를 곱하면,

$$(g^{\rho\sigma}R_{\sigma}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\sigma}g^{\rho\sigma}R)_{;\alpha} = 0$$

따라서

$$\underbrace{(R^{\rho\alpha} - \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}R)}_{\text{아인슈타인 텐서}}_{;\alpha} = 0$$

발산이 0라는 말이다.

아인슈타인 텐서를 발견하기 전에 아래 리치 텐서를 이용해 보았으나 발산이 0가 아니었다.

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu} + [\Gamma_{\mu}, \Gamma_{\nu}]$$

아인슈타인은 특수 상대성 이론의 결과로서 $T^{\mu\nu} = \sigma_0 c^2 \mathbf{u}^\mu \mathbf{u}^\nu$ 를 써야 된다는 걸 확신했지만 비례 상수 k를 몰랐다.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu} \tag{**}$$

약방의 감초 계량 텐서를 곱하자.

$$g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = kg_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

$$R - \frac{1}{2}4R = -R = kT$$

T는 상수이므로 상곡률을 가지며 $R = -kT$ 를 (**)에 대입하면,

$$R^{\mu\nu} = k(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T)$$

상수 값 k를 구하기 위해 구체적인 값을 넣어 보자.

$$R^{00} = k(T^{00} - \frac{1}{2}g^{00}T)$$

$T^{00} = \rho c^2$ 이고 T는 trace(행렬의 대각 성분을 다 더한 값)를 나타낸다. T를 구해보자. 그런데 지구 같이 질량이 작은 천체의 경우에 g_{00} 값만 가진다.

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \implies T = g_{00} T^{00} = \frac{1}{g^{00}} T^{00}$$

따라서

$$R^{00} = k(T^{00} - \frac{1}{2}g^{00} \frac{1}{g^{00}} T^{00}) = \frac{k}{2} T^{00} = \frac{k \sigma_0 c^2}{2} \quad (***)$$

이로서 R^{00} 의 곡률을 안 것이다.

g_{00} 밖에 중요한 값이 없으므로 측지선 방정식을 다음과 같이 다시 쓰자.

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0$$

$cdt = dx^0$ 이므로,

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 + \Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = 0$$

양변에 공통항으로 나누고 c^2 를 곱하여 정리하자.

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^i \tag{1}$$

$$= -\nabla \phi \tag{2}$$

위에서 $F=ma$ 를 고려하면 (2)가 성립한다.

$$R^i_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^i_{00} \tag{3}$$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} g_{;j}^i = -\frac{1}{2} \nabla g_{00} \tag{4}$$

(4)에서 구한 것을 (1)에 대입하면,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -c^2 \Gamma^i_{00} = \frac{c^2}{2} \nabla g_{00} = -\nabla \phi$$

따라서

$$g_{00} = \frac{-2\phi}{c^2} = \frac{-2GM}{c^2 R} = -1.3 * 10^{-9}$$

우리는 ∇^2 를 찾아야 한다. 그런데 (3)을 자세히 보면 미분이 두 번 있다. 아인슈타인은 어떻게든 g와 ϕ 를 결부 시키고 싶었다.

$$\begin{aligned} R^i_{00} &= -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \nabla g_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} \\ &= \frac{1}{2} \nabla^2 \left(\frac{-2\phi}{c^2} \right) = -\frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi \end{aligned}$$

식을 정리한 후 (***)을 대입하면,

$$\nabla^2 \phi = -c^2 R^i_{00} = -c^2 \frac{k \sigma_0 c^2}{2}$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \sigma_0 = \frac{c^4 \sigma_0}{2} k$$

따라서 뉴토니안 제한(newtonian limit)에서 비례 상수 k를 구했다.

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

들어가기

4차원 물리량

간격(4차원 길이)
4차원 속도
4차원 운동량
4차원 총 에너지
3차원 운동에너지
유도

Possion's
equation

geodesic
equation

곡률 텐서에
대한 이해

아인슈타인
텐서

비례 상수 k
찾자.

- 철학이 아무리 위대해도 브레인 속에서 일어난 일..
- 브레인이 아무리 위대해도 자연 속에서 일어난 일..
- 자연의 많은 속성 중 가장 명쾌하게 설명하는 건 질량 에너지 덩어리이다.
- 이 덩어리에 의해 우주(시공)의 구조를 설명해 준다.
- 뉴턴은 무대 장치(시공)와 주인공을 분리했으나 아인슈타인은 다른 게 아님을 보여 주었다.